Points isolés des solutions de l'équation $X^2 = I_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Points isolés des solutions de l'équation*** $X^2 = I_n$ ***dans*** $M_n(\mathbb{R})$ ***Polytechnique***

[?]

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quel est l'ensemble des points isolés de l'ensemble des matrices dont le carré est égal à I_n ?

Solution : *Posons $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n\}$. Nous allons montrer que les points isolés de A sont I_n et $-I_n$. Le cas $n = 1$ étant trivial, on suppose dans la suite $n \geqslant 2$.*

Soit $M \in A$. Le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ étant annulateur de M, la matrice M est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. On a

$$\operatorname{tr} M = 2p - n, \quad \operatorname{tr} M = n \Leftrightarrow M = I_n \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} M = -n \Leftrightarrow M = -I_n.$$

Soit φ l'application de A dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto \operatorname{tr} M$. L'application φ est continue et $\{I_n\} = \varphi^{-1}\left(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\right)$. Ainsi, $\{I_n\}$ est un ouvert de A et I_n est donc un point isolé de A. On montre de même que $-I_n$ est un point isolé de A.

Soit $M \in A \setminus \{I_n, -I_n\}$: $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Notons $E_{1,n}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la 1ère ligne et n-ème colonne qui vaut 1. On constate que $M_k = P \left[\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} + \frac{1}{k} E_{1,n} \right] P^{-1}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) est élément de A et que la suite (M_k) tend vers M sans prendre la valeur M. Ainsi, M n'est pas isolé.

Remarque : *Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on note $A_p = \{M \in A \mid \operatorname{tr} M = 2p - n\}$. On montre que les A_p sont les composantes connexes par arcs de A. On utilise pour cela l'écriture $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$ et on montre qu'on peut choisir P dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, A_p l'est aussi.*

Références