Le commutant dans $M_2(\mathbb{K})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Le commutant dans*** $M_2(\mathbb{K})$

À toute matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ *on associe*

$$\mathscr{C}_A := \{B \in M_2(\mathbb{K}) \ : \ AB = BA\}$$

son commutant. Montrer que $\mathscr{C}_A$ *est de dimension* 2 *ou* 4.

Solution : *Soit*

$$A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}(\bigstar)$$

la décomposition de A *dans la base canonique de* $M_2(\mathbb{K})$.

-Si A *est scalaire (i.e.* $A = \lambda I_2$ *),* $\mathscr{C}_A = M_2(\mathbb{K})$ *est donc dimension* 4.

-Si A *est diagonale mais non scalaire, on vérifie encore sans peine avec* $(\bigstar)$ *que* $\mathscr{C}_A$ *est de dimension* 2.

-Sinon, A *est non scalaire et* A *et* I_2 *sont libres, et* $\mathscr{C}_A$ *est de dimension supérieure ou égale à* 2. *Supposons* $\mathscr{C}_A$ *de dimension supérieure ou égale à* 3. *Dans* $M_2(\mathbb{K})$ *de dimension* 4 *il se doit de rencontrer*

$$\mathscr{E} := \mathbb{K}E_{11} + \mathbb{K}E_{12}.$$

Soit donc

$$B = \alpha E_{11} + \beta E_{12} \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C}_A, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

en écrivant $AB = BA$ *il vient* $c = 0$. *De même, en considérant* $\mathscr{E} := \mathbb{K}E_{21} + \mathbb{K}E_{22}$ *il vient* $b = 0$ *soit* A *diagonale ce qui est absurde donc* $\dim(\mathscr{C}_A) < 3$, *soit* $\dim(\mathscr{C}_A) = 2$.

Remarques : *-* *Pour une matrice* $A \in M_n(\mathbb{K})$, *la dimension du commutant de* A *vérifie*

$$n \leq \dim(\mathscr{C}_A) \leq n^2$$

et la dimension vaut n *si, et seulement si* A *est cyclique (i.e.* A *est semblable à une matrice compagnon ou encore polynômes minimaux et caractéristiques coïncident) et* n^2 *si et seulement si* A *est semblable à la matrice identité.*

- *La question se pose alors de savoir si la dimension du commutant peut prendre toutes les valeurs comprises entre* n *et* n^2. *L'exercice que nous venons de traiter montre que la réponse à*

cette question est non si $n = 2$ car $\dim \mathscr{C}_A$ à priori dans $\{2, 3, 4\}$ ne peut jamais être égale à 3. L'explication de ce phénomène est résumée dans le résultat qui suit

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathscr{C}_A = m$ si et seulement si il existe des entiers $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_k & = n \\ p_1^2 + \cdots + p_k^2 & = m. \end{cases}$$

Car pour $n = 2$, l'entier 3 est le seul élément de $\{2, 3, 4\}$ qui ne vérifie pas ces deux propriétés. Ce dernier résultat est délicat à établir[1]*; pour notre exercice, il est d'ailleurs plus rapide (([**?**], 2000/01, EX. 15)) d'établir (c'est d'ailleurs un corollaire immédiat du précédent) que la codimension du commutant est toujours paire ce qui n'est pas le cas de l'entier 3 ($4 - 3 = 1$...).*

Références