Inégalité, matrices, déterminant

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Inégalité, matrices, déterminant***
*[**?**].*
Soient $c \in \mathbb{R}_+,\ A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $|a_{i,j}| \leq c$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Montrer que

$$|det(A)| \leq c^n n^{n/2}.$$

Solution : *Seul le cas où $A \in GL_n(\mathbb{C})$ mérite explication. Pour une telle matrice désignons par $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.*

- Supposons les colonnes $(C_i)_1^n$ deux à deux orthogonales. Si

$$D_i = \|C_i\|^{-1} C_i, \quad et \quad B = [D_1, \dots, D_n]$$

la matrice B est orthogonale donc $|det(B)| = 1$; vu que

$$\forall\, 1 \leq j \leq n\ :\ \|C_j\| = \sqrt{a_{1,j}^2 + \cdots + a_{n,j}^2} \leq c\sqrt{n}$$

on a

$$|det(A)| = |det(B)|\, \|C_1\| \dots \|C_n\| \leq c^n n^{n/2}.(\star)$$

- Pour le cas général, appliquons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille libre $(C_i)_1^n$: soit $D_1 = C_1$, et $D_2 = C_2 + \lambda_{2,1} C_1$ où comme toujours la constante $\lambda_{2,1}$ est déterminée de sorte que D_2 soit orthogonal à D_1 i.e.

$$\langle C_2, D_1 \rangle + \lambda_{2,1}^2 \|D_1\|^2 = 0$$

avec Pythagore

$$\|D_2\| = \|C_2\|^2 - \lambda_{2,1}^2 \|D_1\|^2 \leq \|C_2\|^2.$$

De même

$$D_k = C_k - \lambda_{k,1} D_1 + \cdots + \lambda_{k,k-1} D_{k-1}$$

et avec

$$\langle C_k, D_j \rangle + \lambda_{k,j}^2 \|D_j\|^2 = 0, \quad \forall\, 1 \leq j \leq k-1$$

on a

$$\|D_k\| = \|C_k\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{k,j}^2 \|D_j\|^2 - 2\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{k,j}^2 \|D_j\|^2$$
$$\leq \|C_k\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{k,j}^2 \|D_j\|^2 \leq |C_k\|^2$$

soit

$$\|D_k\| \leq \|C_k\|, \quad \forall\, 1 \leq k \leq n(\star)$$

puisque bien entendu $det[C_1, \ldots, C_n] = det[D_1, \ldots, D_n]$ *; l'inégalité est démontrée vu* $(\star)$ *et* $(\star)$.

Références