

Groupes, réduction des endomorphismes

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ Groupes, réduction des endomorphismes

Soient $n > p$ deux entiers. Montrer que les groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ ne sont pas isomorphes.

Solution : Pour cela considérons

$$G := \{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ diagonales et telles que } sp(A) \subset \{-1, 1\} \},$$

c'est un sous-groupe commutatif de cardinal 2^n de $GL_n(\mathbb{K})$. Supposons alors qu'il existe un isomorphisme $\varphi : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_p(\mathbb{K})$. Alors $\varphi(G) = H$ est un sous-groupe commutatif de $GL_p(\mathbb{K})$ de cardinal 2^n , dont les éléments sont annulés par $X^2 - 1$: ils sont donc diagonalisables à valeurs propres dans $\{-1, +1\}$. $\varphi(G)$ étant commutatif il est alors bien connu ([?]-2, prop. 55 page 220) que ses éléments sont simultanément diagonalisables i.e.

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{K}) \text{ telle que } \forall B \in \varphi(G) : P^{-1}BP \text{ est diagonale.}$$

$P^{-1}BP$ est alors diagonale à spectre dans $\{-1, +1\}$ ce qui implique que $2^n = |\varphi(G)| \leq 2^p$ inégalité absurde puisque $n > p$.

Références