Réduction des endomorphismes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Réduction des endomorphismes***

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$. Si 1 et -1 sont valeurs propres de A, montrer que A est diagonalisable.

Solution : *Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est annulé par A, le spectre de A est donc inclus dans $\{-1, 0, 1\}$ et vu les hypothèses nous avons donc deux alternatives :*

$Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$ et $P_A(X) = -X(X+1)(X-1)$ est scindé à racines simples : A est diagonalisable.

0 n'est pas valeur propre de A : dans ce cas $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et alors

$$A^4 = A^2 \Longrightarrow A^2 = I_2,$$

A annulée par un polynôme scindé à racines simples est encore diagonalisable (ce dernier cas correspond au cas $sp(A) = \{-1, 1\}$ et donc $P_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$.

Références