Matrices semblables, polynômes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Matrices semblables, polynômes***

Montrer que deux matrices réelles $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont encore semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution : *Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$, soit si $P_1 = \mathrm{re}(P)$ et $P_2 = \mathrm{im}(P)$: $(P_1 + iP_2)A = B(P_1 + iP_2)$ i.e. prenant parties réelles et imaginaires :*

$$P_1 A = BP_1 \quad \& \quad P_2 A = BP_2 . (\bigstar)$$

On considère alors l'application : $\varphi\ :\ z \in \mathbb{C} \mapsto \varphi(z) = det(P_1 + zP_2)$. $\varphi \in \mathbb{C}[z]$ et n'est pas identiquement nulle car $\varphi(i) = det(P)$: il existe donc (un polynôme non nul ne possède dans $\mathbb{C}$ qu'un nombre fini de racines) $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) \in \mathbb{R}^\star$, autrement dit $Q = P_1 + xP_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ et avec $(\bigstar)$ on a immédiatement $A = Q^{-1}BQ$

Remarque : *c'est un cas particulier du résultat suivant :*

« Soit $\mathbb{L}$ une extension du corps $\mathbb{K}$. Soit M et $N \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{L})$, alors elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ » .

Références