

Matrice, comatrice et rang

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Matrice, comatrice et rang

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$, étudier le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A .

Solution : L'identité suivante est toujours vérifiée dans $M_d(\mathbb{C})$

$${}^t(\text{com}(A))A = A {}^t(\text{com}(A)) = \det(A)I_d.$$

et on a aussitôt :

$$\text{rang}(A) = d \iff \text{rang}({}^t(\text{com}(A))) = d,$$

dans le cas contraire le déterminant de A est nul et notre formule devient

$${}^t(\text{com}(A))A = A {}^t(\text{com}(A)) = 0$$

soit, identifiant canoniquement matrice et endomorphisme

$$(\text{im}({}^t(\text{com}(A)))) \subset \ker(A) \quad \& \quad (\text{im}(A) \subset \ker({}^t(\text{com}(A))))$$

et par suite

$$\forall A \in M_d(\mathbb{C}) \quad \text{rang}({}^t(\text{com}(A))) + \text{rang}(A) \leq d \quad (\star)$$

$\rightsquigarrow$ Si $\text{rang}(A) = d - 1$ la matrice A admet un mineur d'ordre $d - 1$ non nul et donc la comatrice de A admet un coefficient non nul, son rang est donc supérieur ou égal à 1 et égal à 1, vu $(\star)$. De même $\det(A) = 0$ et $\text{rang}({}^t(\text{com}(A))) \geq 1$ exigent $\text{rang}({}^t(\text{com}(A))) = 1$ et $\text{rang}(A) = d - 1$.

$\rightsquigarrow$ Si $\text{rang}(A) \leq d - 2$ tous les mineurs d'ordre $d - 1$ de A sont nuls et par suite la comatrice de A est la matrice nulle, donc de rang nul et réciproquement. Résumons nous

$$\begin{cases} \text{rang}(A) = d & \iff \text{rang}({}^t(\text{com}(A))) = d, \\ \text{rang}(A) = d - 1 & \iff \text{rang}({}^t(\text{com}(A))) = 1 \quad \text{pour } d \geq 2, \\ \text{rang}(A) \leq d - 2 & \iff \text{rang}({}^t(\text{com}(A))) = 0. \end{cases}$$

Références