Rayon spectral et décomposition de Dunford

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Rayon spectral et décomposition de Dunford***

[?]

En utilisant la décomposition de Dunford, montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a :

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Solution : *Par Dunford $A = D + N$ avec D diagonalisable de mêmes valeurs propres que A, N nilpotente et $ND = DN$. donc pour $k \geq n$ on aura $N^k = 0$ et*

$$A^k = (D+N)^k = \sum_{l=0}^{k} C_n^l D^{k-l} N^l = \sum_{l=0}^{n} C_n^l D^{k-l} N^l = D^{k-n} \sum_{l=0}^{n} C_n^l D^{n-l} N^l.$$

Soit, en posant $\alpha = \sup_{0\leq l\leq n}\{\|D\|^{n-l}\|N\|^l\}$

$$\|A^k\| \leq \|D\|^{k-n} \sum_{l=0}^{n} C_k^l \|D\|^{n-l}\|N\|^l \leq \alpha \|D\|^{k-n} \left(\sum_{l=0}^{n} C_k^l\right)$$

or, pour $0 \leq l \leq n$ et $k \geq n$

$$C_k^l \leq k(k-1)\dots(k-l+1) \leq k^l \leq k^n$$

si bien que

$$\|A^k\| \leq \alpha(n+1)k^n \|D^{k-n}\|$$

et

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq (\alpha(n+1))^{\frac{1}{k}}\, k^{\frac{n}{k}} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}}, (\bigstar)$$

en remarquant enfin que $\lim_{k\to\infty} (\alpha(n+1))^{\frac{1}{k}}\, k^{\frac{n}{k}} = 1$ et

$$\lim_{k\to\infty} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k-n}}\right)^{\frac{k-n}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k-n}} = \rho(D) = \rho(A)$$

avec $(\bigstar)$, il vient finalement $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Références