Étude de $M_3(\mathbb{R}) \ni B \mapsto AB$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude de*** $M_3(\mathbb{R}) \ni B \mapsto AB$

[?]

Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, considérons l'endomorphisme

$$\varphi_A \; : \; B \in M_3(\mathbb{R}) \mapsto \varphi_A(B) = AB \in M_3(\mathbb{R}).$$

Si le déterminant de A est 32 et son polynôme minimal $(t-4)(t-2)$, quelle est la trace de φ_A ?

Solution : *$\pi_A(t) = (t-4)(t-2)$ est scindé à racines simples : A est diagonalisable et admet comme valeurs propres 4 et 2 de multiplicités respectives α et β ; le déterminant est donc $\det(A) = 32 = 2^\alpha 4^\beta$ soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ (le polynôme caractéristique de A est $P_A(t) = -(t-4)^2(t-2)$...). Soit $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base de vecteurs propres de A avec $\ker(A-4I_3) = \text{vect}\{v_1, v_2\}$, $\ker(A-2I_3) = \text{vect}\{v_3\}$ et considérons les neuf matrices $E_{i,j} \in M_3(\mathbb{R})$ $1 \leq i, j \leq 3$ définies comme suit : la ième colonne de la matrice $E_{i,j}$ est v_j les deux autres colonnes sont constituées de zéros. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$, les neuf matrices $E_{i,j}$ sont linéairement indépendantes dans $M_3(\mathbb{R})$: c'est donc une base de $M_3(\mathbb{R})$. Par ailleurs ce sont des vecteurs propres de φ_A car un calcul élémentaire nous montre que $\varphi_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \lambda_j E_{i,j}$ avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 2$. Ainsi $M_3(\mathbb{R})$ possède une base de vecteurs propres : φ_A est donc diagonalisable et sa trace est $\text{trace}(A) = 6.4 + 3.2 = 30$.*

Références