Encore deux démonstrations du Théorème de Cayley-Hamilton

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Encore deux démonstrations du Théorème de Cayley-Hamilton***

Quelques démontrations du Théorème de Cayley-Hamilton

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}) \quad : \quad P_A(A) = 0.$$

1. *Déduire de la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ le théorème de Cayley-Hamilton.*
2. *Si $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ le plus petit sous espace stable par φ (l'endomorphisme associé à A) contenant x admet une base de la forme $\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{k-1}(x)\}$. En la complétant et calculant le polynome caractéristique de φ dans cette base vérifier que : $P_A(\varphi)(x) = 0$.*

Solution :

1. *Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe $G \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$A = G \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} G^{-1}$$

si bien que

$$P_A(A) = G \begin{pmatrix} P_A(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_A(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_A(\lambda_n) \end{pmatrix} G^{-1} = 0.$$

L'application continue

$$M_n(\mathbb{C}) \ni M \mapsto P_M(M) \in M_n(\mathbb{C})$$

est donc nulle sur $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$, partie dense de $M_n(\mathbb{C})$ (c.f. exercice 69) : elle est donc identique-

ment nulle.

2. *On cherche à montrer que $P_A(A)x = 0$ pour tout vecteur x. Soit donc x un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ (si $x = 0$ il n'y a rien à démontrer), notons $\mathscr{E}_x$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace stable par A de $\mathbb{C}^n$ contenant x. $\mathscr{E}_x$ est de dimension $1 \leq d \leq n$, et admet pour base $\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x\}$.*

   Il existe donc $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$A^d x \;=\; a_{d-1}A^{d-1}x + \cdots + a_1 Ax + a_0 x.(\bigstar)$$

   Complétons alors la famille libre $\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x, e_{d+1}, \dots, e_n\}$$

   Dans cette base la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_P & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

   où $B \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ et C_P est la matrice compagnon du polynôme $P(X) \;=\; X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ i.e. :

$$C_P \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   on a donc $P_A(X) = P_{C_P}(X)P_B(X)$, mais alors

$$\begin{aligned} P_A(A)x &= P_{C_P}(A)P_B(A)x \\ &= P_B(A)P_{C_P}(A)x \\ &= P_B(A)(A^d x - a_{d-1}A^{d-1}x - \cdots - a_1 Ax - a_0 x) = 0 \quad \text{vu} \quad (\bigstar) \end{aligned}$$

   dans la seconde inégalité les deux endomorphismes $P_{C_P}(A)$ et $P_B(A)$ commutent légitimement comme polynômes en A. Ainsi $P_A(A)x = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$ i.e. $P_A \equiv 0$.

Remarques : *- on notera l'extrême simplicité de cette dernière preuve (niveau première année) qui est valable dans un contexte bien plus général que la précédente.*

- Pour une autre démonstration moins classique voir l'exercice 94 et pour un joli bestiaire de preuves de Cayley-Hamilton consulter `/httpblabla?????????`

Références