Réduction des endomorphismes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Réduction des endomorphismes***

[?],

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la matrice $B \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si $A = 0$.

Solution : *Si $A = 0$ alors $B = 0$ est diagonalisable. Réciproquement, vu la forme de A la polynôme caractéristique de B vérifie*

$$\chi_B = (\chi_A)^2$$

et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

qui implique

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}, \quad \forall\, P \in \mathbb{C}[X].(\diamondsuit)$$

En particulier, le polynôme minimal de B vérifie

$$\mu_B(A) = 0$$

et

$$\mu_A \quad \text{divise} \quad \mu_B.(\star)$$

Supposons B diagonalisable, μ_B ne possède que des racines simples et comme A et B ont même ensemble valeurs propres avec $(\star)$ nous avons $\mu_A = \mu_B$ qui avec $(\diamondsuit)$ implique

$$A\mu_A'(A) = 0.$$

μ_A divise donc $X\mu_A'$, les deux polynômes μ_A et $X\mu_A'$ étant de même degré d

$$d\mu_A = X\mu_A'$$

soit $\mu_A = X^d$. *Mais* $\mu_A = \mu_B$ *n'a que des racines simples, donc* $d = 1$, $\mu_A(X) = X$ *et finalement* $A = 0$.

Références