Étude $A \mapsto A^3$ dans $M_3(\mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude*** $A \mapsto A^3$ ***dans*** $M_3(\mathbb{R})$

[?].

Déterminer l'image de l'application φ de $M_3(\mathbb{R})$ dans $M_3(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = A^3$.

Solution : *Nous allons vérifier que cette image est constituée de toutes les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ sauf celles admettant 0 comme valeur propre multiple et qui ne sont pas diagonalisables.*

Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ et cherchons $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(A) = A^3$. On distingue plusieurs cas pour B

- B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Il existe alors une base $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$, des réels α, β, γ tels que

$$Bu = \alpha u, \quad Bv = \beta v, \quad Bw = \gamma w.$$

$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ désignant les racines cubiques des valeurs propres α, β, γ, définissons la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ par

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v, \quad Aw = \nu w.$$

A est bien réelle et vérifie $A^3 = B$ et B admet bien un antécédent par φ.

- B possède une valeur propre non réelle.

Les valeurs propres de B sont donc un réel α et deux complexes non réels conjugués ω et $\overline{\omega}$. Il existe un vecteur réel non nul u et un vecteur complexe z non nul tels que

$$Bu = \alpha u, \quad Bz = \omega z, \quad \text{et par suite}, \quad B\overline{z} = \overline{\omega z}.$$

Notons λ le réel racine cubique de α et soit θ une racine cubique de ω. La matrice A définie dans la base $(u, z, \overline{z})$ de $\mathbb{C}^3$ par

$$Au = \lambda u, \quad Az = \theta z, \quad A\overline{z} = \overline{\theta}\overline{z}$$

vérifie $A^3 = B$. En outre $\overline{A}$ envoie u sur λu, z sur $\overline{\theta} z$ et $\overline{z}$ sur $\theta \overline{z}$. A est donc réelle et et B admet bien un antécédent par φ.

- B possède une valeur propre réelle non nulle λ d'ordre 2 et n'est pas diagonalisable.

Les valeurs propres de B sont λ, λ, μ où μ est un autre réel. Posons $\alpha = \lambda^{1/3},\ \beta = \mu^{1/3}$, on a donc

$$\mathbb{R}^3 = \ker(B - \lambda I_3)^2 \oplus \ker(B - \mu I_3)$$

La dimension de $\ker(B - \lambda I_3)$ *n'est pas deux sinon* B *serait diagonalisable, elle vaut donc* 1*. Puisque* $\dim\ker(B-\lambda I_3)^2 = 2,\ \dim\ker(B-\lambda I_3) = 1$*, considérons* $u \in \ker(B-\lambda I_3)^2 \setminus \ker(B-\lambda I_3),\ v = (B-\lambda I_3)u$ *et* w *un vecteur non nul de* $\ker(B-\mu I_3)$*. on a ainsi construit une base* (u,v,w) *de* $\mathbb{R}^3$ *qui vérifie*

$$Bu = \lambda u + v, \quad Bv = \lambda v, \quad Bw = \mu w.$$

Une matrice $A \in M_3(\mathbb{R}^3)$ *vérifiant pour un certain réel* c

$$Au = \alpha u + cv, \quad Av = \alpha v, \quad Aw = \beta w$$

vérifiera

$$A^3 u = \lambda u + 3\alpha^2 cv, \quad A^3 v = \lambda v, \quad A^3 w = \mu w$$

de sorte que si $c = \dfrac{1}{3\alpha^2}$ *:* $A^3 = B$*.*

- B possède une valeur propre non nulle λ d'ordre 3 et n'est pas diagonalisable

Dans ce cas $B = \lambda(I_3 + N)$ *où* N *est une matrice nilpotente non nulle. Posons* $\alpha = \lambda^{1/3}$ *et cherchons* A *sous la forme* $A = \alpha(I_3 + M)$ *avec* M *nilpotente. On a* $M^3 = 0$ *donc* $A^3 = \lambda(I_3 + 3M + 3M^2)$ *et tout se ramène à l'équation* $3M + 3M^2 = N$ *qui est vérifiée par* $M = \dfrac{1}{9}(3N - N^2)$*. Une fois de plus* B *admet un antécédent.*

- B admet 0 comme valeur propre d'ordre 2 ou 3 et n'est pas diagonalisable.

Si l'équation $A^3 = B$ *admet une solution,* A *admet aussi comme vaelur propre d'ordre* 2 *ou* 3*. Si* 0 *est valeur propre d'ordre* 3 *alors* A *est nilpotente,* $A^3 = 0$*, ce qui est absurde puisque* B *n'est pas diagonalisable. Supposons donc que* O *soit valeur propre d'ordre* 2 *de* A *et notons* α *l'autre valeur propre (réelle).* $\mathbb{R}^3 = \ker(A^2) \oplus \ker(A - \alpha I_3)$ *mais* $A^3 = B$ *implique* $Bx = 0,\ \forall\, x \in \ker(A^2)$ *soit* $\mathbb{R}^3 = \ker(B) \oplus \ker(B - \alpha^3 I_3)$ *:* B *est alors diagonalisable ce qui est exclut : tous les cas sont épuisés et la conclusion annoncée s'impose.*

Références