

# Autour du commutant

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

## Exercice 0.1 ★ Autour du commutant

[?](1998).

Déterminer la structure de l'ensemble  $\mathcal{E}$  des endomorphismes  $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$  vérifiant

$$\varphi({}^t B) = {}^t \varphi(B), \quad \forall B \in M_n(\mathbb{R}).$$

**Solution :** Si on désigne par  $T$  l'endomorphisme  $M \mapsto {}^t M$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{E}$  n'est rien d'autre que le commutant de  $T$  et c'est donc une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ . Soit  $\mathcal{S}_n$  (resp.  $\mathcal{A}_n$ ) l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétrique). Puisque  $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ , un endomorphisme  $\varphi$  vérifiant  $\varphi \circ T = T \circ \varphi$  doit laisser stable les deux sous-espaces propres de  $T$  que sont  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$ . Mais inversement, un endomorphisme laissant stable  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$  satisfait (avec les notations évidentes) à

$${}^t \varphi(B) = {}^t \varphi(S + A) = {}^t \varphi(S) + {}^t \varphi(A) = \varphi(S) - \varphi(A) = \varphi(S - A) = \varphi({}^t(S + A)) = \varphi({}^t B)$$

ce qui montre que  $\varphi \in \mathcal{E}$ . L'algèbre  $\mathcal{E}$  est donc constituée des endomorphismes de  $M_n(\mathbb{R})$  qui laissent stable les sous-espaces  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$ . Il existe donc un isomorphisme évident

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}_n) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n)$$

qui à  $\varphi$  associe le couple  $(\varphi|_{\mathcal{S}_n}, \varphi|_{\mathcal{A}_n})$ . Il en résulte que

$$\dim(\mathcal{E}) = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \left( \frac{n(n-1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

**Remarque :** on retrouve dans la dernière formule le résultat connu mais plus délicate à établir, à savoir que la dimension du commutant est toujours une somme de carrés  $p_1^2 + \dots + p_k^2 \in \{d, d+1, \dots, d^2\}$  (ici  $d = n^2$ ) telle que  $p_1 + \dots + p_k = d$ .

## Références