Histoire de matrices nilpotentes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Histoire de matrices nilpotentes***

*[**?**]-(2003/04).*

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Solution : *La réponse est oui si $n \leqslant 2$, non si $n > 2$.*

- *Si $n = 1$: c'est clair. Si $n = 2$, on a $(BA)^3 = B(AB)^2A = 0$ donc BA est nilpotente ; comme elle est de taille 2, son indice est inférieur à 2 i.e. $(BA)^2 = 0$.*
- *Pour $n = 3$, BA est nilpotente d'indice au plus 3 et AB d'indice de nilpotence au plus 2. On va chercher A, B pour que AB soit d'indice 2 et BA soit d'indice 3 et plus précisément telles que, par exemple,*

$$BA = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{Ker}(A)$ doit être une droite (A n'est pas inversible et de rang supérieur à celui de N, donc de rang 2) incluse dans le noyau de $N = BA$, $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $(1, 0, 0)$. De même $\mathrm{Im}(B)$ doit être un plan qui doit contenir l'image de N i.e. le plan engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.

On est donc amené à chercher sous les formes $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \\ 0 & c & c' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & e & f \\ d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un peu de calcul montre que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

- *Pour $n > 3$ il suffit de border les matrices précédentes par des zéros.*

Références