Matrices et réduction

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Matrices et réduction***

[?]

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $C \in M_2(\mathbb{R})$. *À quelle condition la matrice* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Solution : *Le résultat suivant est essentiel : soit* $M \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice donc le polynôme caractéristique est scindé et s'écrit* $\chi_M = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_d)^{\alpha_d}$ *où les* λ_i *sont les valeurs propres deux à deux distinctes de* M *de multiplicités* $\alpha_i \in \mathbb{N}^\star$. *Alors* M *est diagonalisable si, et seulement si,* M *annule* $(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_d)$.

Ici $\chi_M = (X-1)^2(X-b)^2$. *Distinguons deux cas :*

- *Si* $b = 1$. M *est diagonalisable si, et seulement si,* $M = I_4$ *soit* $a = c = 0$ *et* $C = 0$.
- *Si* $b \neq 1$. *Dans ce cas,* M *est diagonalisable si, et seulement si,* $(M - I_4)(M - bI_4) = 0$.

Un calcul direct montre que cette dernière condition équivaut à $a = c = 0$. *En résumé,* M *est diagonalisable si, et seulement si*

$$(\, a = c = 0\,) \quad \textit{et} \quad (\, b \neq 1 \ \ \textit{ou} \ \ C = 0\,).$$

Références