Dimension, bases et applications linéaires

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Dimension, bases et applications linéaires***

Soient E_1, E_2 *deux sous-espaces de* $\mathbb{R}^{10}$ *vérifiant*

$$E_1 \subset E_2, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 6.$$

Déterminer la dimension du sous espace $\mathscr{E}$ *de* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ *définit par*

$$\mathscr{E} = \left\{ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10}) \ : \ T(E_1) \subset E_1 \ \& \ T(E_2) \subset E_2 \right\}.$$

Solution : *Compétons une base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* E_1 *pour obtenir une base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ *de* E_2 *; enfin, complétons la encore une fois pour obtenir une base* $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_{10}\}$ *de* $\mathbb{R}^{10}$. *Avec ce choix, la matrice d'un endomorphisme* $T \in \mathscr{E}$ *sera de la forme*

$$\mathrm{mat}(T, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{E} = 9 + 18 + 40 = 67$.

Références