# Limaçon de Pascal

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Limaçon de Pascal***

*On considère le cercle*

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$$

*et le point* $A\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$*. Déterminer le lieu des projections orthogonales de* $A$ *sur les tangentes au cercle.*

***Solution :*** *Un point du cercle a pour coordonnées* $M(t)\left|\begin{matrix}\cos t\\\sin t\end{matrix}\right.$ *et la tangente en* $M(t)$ *a pour équation cartésienne*

$$T_t : \cos t x + \sin t y = 1$$

*Le projeté orthogonal* $P(t)$ *de* $A$ *sur* $T_t$ *vérifie* $P\left|\begin{matrix}x(t)\\y(t)\end{matrix}\right. = A + \lambda\overrightarrow{OM(t)}$ *et on trouve que*

$$\begin{cases} x(t) &= -2 + (1 + 2\cos t)\cos t \\ y(t) &= (1 + 2\cos t)\sin t \end{cases}$$

*En effectuant un changement de repère de centre* $A$ *(*$X = x + 2$*,* $Y = y$*), puisque* $t$ *est l'angle entre* $(Ox)$ *et* $AP(t)$*, on a une équation polaire de la courbe décrite par* $P$ *:*

$$\rho = 1 + 2\cos\theta$$

*qu'on étudie.*

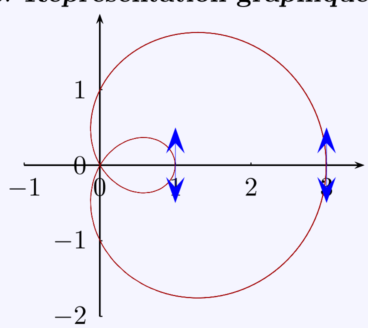
1. **Domaine de définition**. *La fonction* $\rho$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude**. *La fonction* $\rho$ *est paire et* $2\pi$*-périodique. On travaillera sur* $I = [0, \pi]$ *et on déduire la partie manquante de la courbe par une symétrie d'axe* $(Ox)$.

3. ***Variations***. *Pour tout* $\theta \in I$, $\rho'(\theta) = -2\sin\theta$. *Donc* $\rho'$ *est négative sur* $I$. *On calcule facilement que le seul point de* $I$ *où* $\rho$ *s'annule est* $2\pi/3$. *La courbe présente un vecteur tangent orthoradial en* $0$ *et* $\pi$.

| $\theta$ | $0$ | | $2\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho'(\theta)$ | $0$ | $-$ | $-\sqrt{3}$ | $-$ | $0$ |
| $\rho(\theta)$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

*Remarquons que la courbe passe par le pôle quand* $\theta = 2\pi/3$.

4. ***Étude du point stationnaire***. *La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude des branches infinies***. *La courbe ne présente pas de branche infinie.*
6. ***Représentation graphique***.




*C'est un limaçon de Pascal.*

# Références