

Trisectrice de Ceva

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Trisectrice de Ceva**

Construire la courbe

$$\rho = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$$

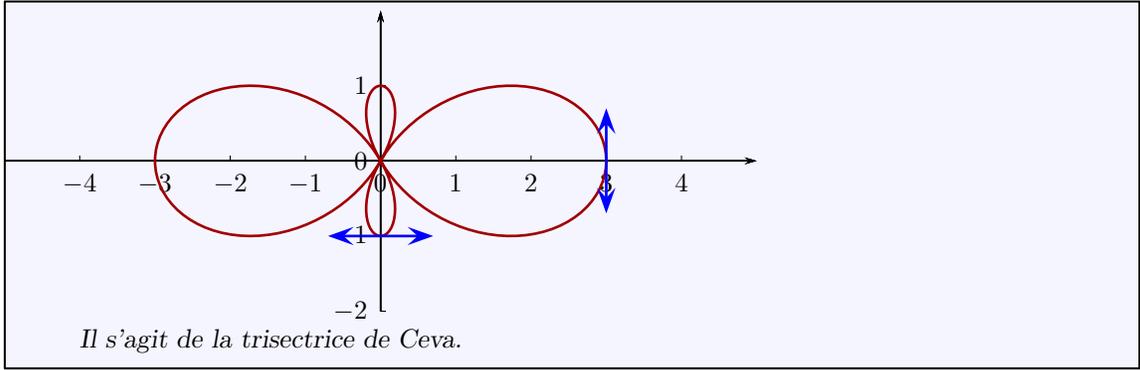
Solution :

- 1. Domaine de définition.** La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Mais en utilisant la trigonométrie, on montre que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin 3\theta = 4 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta$ donc $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \rho(\theta) = 4 \cos^2 \theta - 1$ et ρ se prolonge par continuité en chaque point de $\pi\mathbb{Z}$. On travaille donc sur \mathbb{R} .
- 2. Restriction de l'intervalle d'étude.** ρ est 2π périodique et on travaille alors sur un intervalle de longueur 2π . Mais $\forall \theta \in \mathbb{R}, \rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc on peut travailler sur un intervalle de longueur π . Enfin, comme ρ est paire, son support admet une symétrie d'axe (Ox) et on étudie la courbe sur $I = [0, \pi/2]$.
- 3. Variations.** Pour tout $\theta \in I, \rho'(\theta) = -8 \sin \theta \cos \theta = -4 \sin(2\theta)$. Donc ρ' est négative sur I . On calcule facilement que les seuls points de I où ρ s'annule sont 0 et $\pi/2$. Par ailleurs, le seul point de I où ρ s'annule est $\pi/3$. On en déduit les variations de ρ :

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$-2\sqrt{3}$	0
$\rho(\theta)$		3	-1

La courbe présente un vecteur tangent orthoradial en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi/2$.

- 4. Étude du point stationnaire.** La courbe ne présente pas de point stationnaire.
- 5. Étude de la branche infinie.** La courbe ne présente pas de branche infinie.
- 6. Représentation graphique.**



Références