

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Construire la courbe

$$\rho = 1 - \tan 2\theta$$

Solution :

- Domaine de définition :** Le domaine de définition de ρ est $D_\rho = \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Restriction du domaine d'étude :** Comme $\tan$ est π périodique, ρ est $\pi/2$ périodique et il suffit de travailler sur un intervalle de longueur $\pi/2$. On travaillera sur $I = [0, \pi/2] \setminus \{\pi/4\}$.
- Variations de ρ :** Pour tout $\theta \in I$, $\rho'(\theta) = 2(1 + \tan^2 2\theta)$ donc ρ est croissante sur $[0, \pi/4[$ et sur $] \pi/4, \pi/2]$.

θ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	-2	-	-4	-
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$
			$\searrow$	$-\infty$
			$+\infty$	$\searrow$
				1

- Point stationnaire :** La courbe ne présente pas de point stationnaire.
- Étude de la branche infinie :** lorsque $\theta \rightarrow \pi/4$. Un point de la courbe a pour coordonnées $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ où $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$. On calcule $y(\theta)/x(\theta) = \tan \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi/4} 1$. Puis

$$\begin{aligned}
 y(\theta) - x(\theta) &= \frac{(\cos 2\theta - \sin 2\theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\cos 2\theta} \\
 &= -2 \frac{\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}) \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos 2\theta} \\
 &= -\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{2}}{\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} \frac{2\theta - 2\frac{\pi}{4}}{\cos(2\theta - \cos \frac{2\pi}{4})} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

en reconnaissant deux taux d'accroissement. Donc la droite $y = x + \sqrt{2}/2$ est asymptote à la courbe quand $\theta \rightarrow \pi/4$. Si on sait utiliser les équivalents, c'est un peu plus simple :

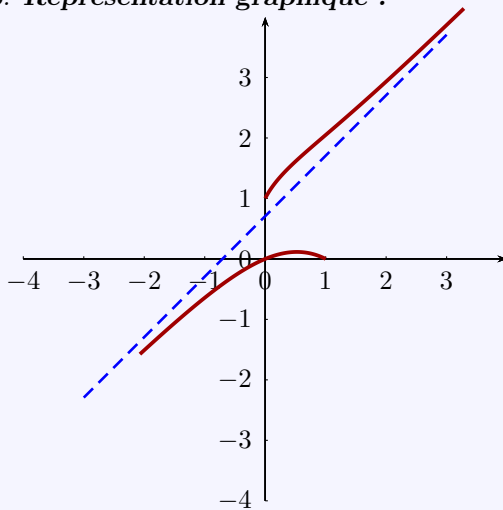
$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \underset{\theta \rightarrow \pi/4}{\sim} \frac{\pi}{4} - \theta \quad \text{et} \quad \cos 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \underset{\theta \rightarrow \pi/4}{\sim} \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

donc par produit d'équivalents :

$$y(\theta) - x(\theta) \underset{\theta \rightarrow \pi/4}{\sim} -\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit de plus la position de la courbe par rapport à l'asymptote, elle est en dessous quand $\theta \rightarrow \pi/4^-$ et au dessus quand $\theta \rightarrow \pi/4^+$.

6. Représentation graphique :



Références