Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Construire la courbe paramétrée

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

Solution :

— ***Domaine de définition :*** *Le domaine de définition de* ρ *est* $D_\rho = \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ *; Remarquons que*

$$\forall \theta \in D_\rho, \quad \rho\left(\theta\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\left(\theta + \pi/4\right)}.$$

— ***Restriction du domaine d'étude :*** *Soit* $\theta \in D_\rho$.

  — $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, *donc* $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. *On n'étudie la courbe que sur un intervalle de la forme* $[\alpha, \alpha + 2\pi]$.

  — $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ *: le point* $M(\theta + \pi)$ *est le symétrique du point* $M(\theta)$ *par rapport à l'origine. Il suffit de faire l'étude sur l'intervalle* $I = [0, \pi] \setminus \{\pi/4\}$ *et de compléter la courbe par une symétrie par rapport au pôle.*

— ***Variations de*** ρ ***:*** *Pour tout* $\theta \in I$

$$\rho'\left(\theta\right) = -\frac{1}{\left(\cos\theta - \sin\theta\right)^2}$$

donc ρ *est décroissante sur* $[0, \pi/4[$ *et sur* $]\pi/4, \pi]$.

θ	0		$\pi/4$		π
$\rho'\left(\theta\right)$	1	$-$	$\Vert$	$-$	1
ρ	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

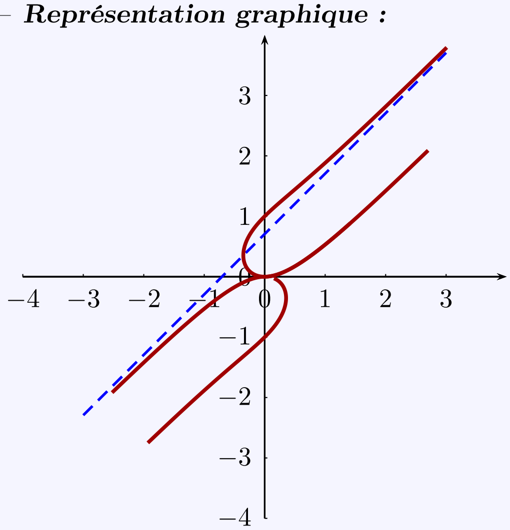
- **Point stationnaire :** *ρ s'annule en $\theta = 0$ ou en $\theta = \pi$ en changeant de signe. Le passage au pôle correspond à un point ordinaire à tangente horizontale.*
- **Étude de la branche infinie :** *lorsque $\theta \to \pi/4$. Un point de la courbe a pour coordonnées $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ où $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. On calcule $y(\theta)/x(\theta) = \tan\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} 1$. Puis*

$$y(\theta) - x(\theta) = \frac{\sin\theta\,(\sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta} = \sin\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc la droite $y = x + \sqrt{2}/2$ est asymtote à la courbe quand $\theta \to \pi/4$. On aurait aussi pu procéder ainsi : on fait l'étude dans le repère polaire $\mathcal{R}_{\pi/4}$. Dans ce repère, le point $M(\theta)$ a pour ordonnée $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/4)$, et en posant $h = \theta - \pi/4$, on trouve que

$$\tilde{Y}(h) = Y(\pi/4 + h) = \cos h(1 + \tan h) = 1 + h + o(h)$$

Par conséquent, il y a une droite asymptote horizontale, d'équation $Y = 1$ dans le repère polaire $\mathcal{R}_{\pi/4}$, et lorsque $\theta \to \pi/4^{-1}$, la courbe arrive sous l'asymptote, et lorsque $\theta \to \pi/4^{+}$, elle arrive au dessus.
- **Représentation graphique :**



Références