Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Tracer la courbe polaire $\rho = 1 + \tan\frac{\theta}{2}$. On précisera les coordonnées du point double.

Solution :

1. ***Domaine de définition de ρ :*** *La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.*
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude :*** *Puisque $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ et il suffit donc de faire l'étude sur $[0, 2\pi]$.*
3. ***Tableau de signe de ρ :*** *Il est clair que ρ est croissante, et s'annule en $3\pi/2$.*

θ	0		$\pi/2$		π			$3\pi/2$		2π
ρ	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

4. ***Passage au pôle :*** *le passage au pôle correspond à un point ordinaire, à tangente verticale (ρ change de signe).*
5. ***Branche infinie :*** *lorsque $\theta \to \pi$. Il y a une direction asymptotique horizontale. Pour chercher une droite asymptote, étudions $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. En posant $u = \theta - \pi$, $\tilde{y}(u) = y(\pi + u) = -\sin u + 2\cos^2(u/2) = 2 - u + o(u)$. La droite d'équation $y = 2$ est donc asymptote à la courbe, et lorsque $\theta \to \pi^-$, la courbe arrive sur l'asymptote, et lorsque $\theta \to \pi^+$, la courbe arrive sous l'asymptote.*
6. ***Point double :*** *On voit sur le dessin que le point double vérifie $M(\theta_1) = M(\theta_1 + \pi)$ avec $\theta_1 \in [0, \pi/2]$, c'est-à-dire*
$$\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_1 + \pi)$$
En posant $t = \tan(\theta_1/2)$, on obtient
$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

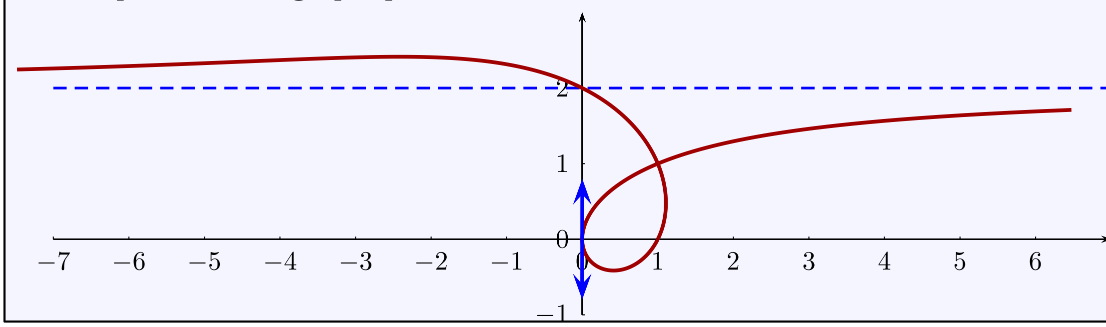
c'est-à-dire $t = \sqrt{2} - 1$ *(pour avoir* $\theta_1 \in [0, \pi/2]$*. Alors si le point double a pour coordonnées* $M = (x_1, x_2)$*, on trouve, puisque* $\rho(\theta_1) = \sqrt{2}$*, que :*

$$x_1 = \rho(\theta_1)\cos(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 1$$

$$y_1 = \rho(\theta_1)\sin(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{2t}{1 + t^2} = 1$$

Donc le point double est $M = (1, 1)$*.*

7. ***Représentation graphique :***



Références