Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 novembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On définit à partir des colonnes de A, la matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où :

$$B_i = \sum_{j\neq i} A_i.$$

Exprimez le déterminant de la matrice B en fonction du déterminant de la matrice A.

Solution : *Qui dit opérations sur les colonnes dit multiplication à droite par une matrice. Quelle matrice ? Il suffit pour cela de prendre $A = I_n$. On voit ainsi que $B = AC$ avec $C = J - I_n$ où J est la matrice qui ne comporte que des 1. Pour calculer $\det C$ le plus simple est de calculer $P(\lambda) = \det(C - \lambda I_n) = (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - n)$ puis de faire $\lambda = 1$. C'est cette méthode qui sera employée l'an prochain lorsqu'on saura calculer les polynômes caractéristiques. En attendant on va utiliser le même principe : "Plus une expression comporte de variables et plus elle est facile à évaluer". Ici on calcule le déterminant de la matrice M_h qui comporte des zéros sur la diagonale, 1 au-dessus et $1 + h$ au-dessous. On prendra alors la valeur en $h = 0$ de ce polynôme en h. Enfin on calcule $F(x) = \det(M_h - xJ)$ (on soustrait x à tous les éléments).*
D'abord F est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Maintenant on soustrait la première colonne à toutes les autres. Les x disparaissent des $n - 1$ dernières colonnes. De ce fait F est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. F est donc déterminé par deux valeurs, 1 et $1 + h$. C'est ça l'idée d'introduire ce $1 + h$. Donc $F(1) = (-1)^n$ comme déterminant d'une matrice triangulaire. De même $F(1 + h) = (-1 - h)^n$. Enfin $\dfrac{F(1) - F(0)}{1} = \dfrac{F(1 + h) - F(1)}{h}$, d'où $F(0) = (-1)^n \left(1 - \dfrac{(1 + h)^n - 1}{h}\right)$. On fait ensuite tendre h vers 0, soit en dérivant soit par la formule du binôme, pour trouver $F(0) = (-1)^n(1 - n)$ comme annoncé.

Références