Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère un système $(f_1, \dots, f_n)$ *de fonctions de* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *qui est libre dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* n *réels* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tels que la matrice* $A = ((f_i(x_j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *soit inversible.*

Solution : *Par récurrence. Si* $n = 1$, *le résultat est clair. Supposons la propriété vraie pour un système de* $n-1$ *fonctions. Puisque* $(f_1, \dots, f_{n-1})$ *est libre, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe* $n-1$ *réels* $(x_1, \dots, x_{n-1})$ *tels que la matrice* $A_{n-1} = ((f_i(x_j)))_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ *soit inversible. Par l'absurde, supposons que* $\forall x \in \mathbb{R}$, *la matrice*

$$A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{pmatrix}$$

ne soit pas inversible. En développant $\det(A)$ *par rapport à la dernière colonne, on trouve alors que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_{1n} f_1(x) + \dots + \Delta_{nn} f_n(x) = 0$$

Mais comme $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre, on aurait en particulier* $\Delta_{nn} = 0$, *mais* $\Delta_{nn} = \det(A_{n-1}) \neq 0$ *ce qui est absurde.*

Références