Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

12 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux matrices à coefficients réels $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose qu'elles sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution : *Par hypothèse, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Notons $P = P_1 + iP_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque $BP = PA$, on en tire que $BP_1 + iBP_2 = P_1A + iP_2B$ d'où en identifiant partie réelle et partie imaginaire de chaque coefficient, $BP_1 = P_1A$ et $BP_2 = P_2B$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $Q = P_1 + \lambda P_2$. On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $BQ = QA$. Il suffit donc de trouver un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = P_1 + \lambda P_2$ soit une matrice inversible. Considérons le polynôme*

$$\pi(\lambda) = \det(P_1 + \lambda P_2).$$

Si l'on avait $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\pi(\lambda) = 0$, le polynôme complexe $\pi(\lambda)$ serait nul et alors $\pi(i) = 0$, ce qui est faux puisque P est une matrice inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = P_1 + \lambda P_2$ soit une matrice inversible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et alors $B = QAQ^{-1}$.

Références