Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers relatifs. Montrer l'équivalence

$$A \text{ inversible et } A^{-1} \text{ a ses coefficients dans } \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. *$\Rightarrow$. Comme $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$, et que $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, on doit avoir que $\det(A) = \pm 1$.*
2. *$\Leftarrow$. En utilisant la formule*
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}$$
comme tous les cofacteurs Δ_{ij} de A sont des entiers, et que $\det(A) = \pm 1$, on voit que les coefficients de A^{-1} sont entiers.

On en déduit facilement que $Gl_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$

Références