Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $f \neq 0$, $f(0) = 0$ et

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que

$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow \det(A) = 0.$$

Solution : *Remarquons que $f(I_2) = 1$. En effet, $f(I_2) = f(I_2.I_2) = f(I_2).f(I_2)$ et donc soit $f(I_2) = 0$, soit $f(I_2) = 1$. Si $f(I_2) = 0$ alors pour tout $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = f(A.I_2) = f(A).f(I_2) = 0$ et $f = 0$ ce qui contredit une des hypothèses faites sur f. Donc $f(I_2) = 1$.*

— *Par contraposée, on suppose que $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, c'est-à-dire que $\det(A) \neq 0$. Alors $1 = f(I_2) = f\left(A.A^{-1}\right) = f(A).f\left(A^{-1}\right)$ et $f(A) \neq 0$.*

— *Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de déterminant nul. Si $A = 0$ alors par hypothèse $f(A) = 0$ et la propriété est prouvée. Sinon, alors $\operatorname{rg}(A) = 1$ et il existe des matrices inversibles $P, Q \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PJQ$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour prouver que $f(A) = 0$ il suffit de montrer que $f(J) = 0$. Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $f(J).f(K) = f(J.K) = f(0) = 0$ donc soit $f(J) = 0$, soit $f(K) = 0$. Mais si $f(K) = 0$ alors, comme K est de rang 1, il existe des matrices inversibles $P_0, Q_0 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $K = P_0JQ_0$ et donc $J = P_0^{-1}KQ_0^{-1}$. Mais alors $f(J) = f\left(P_0^{-1}KQ_0^{-1}\right) = f\left(P_0^{-1}\right)f(K)f\left(Q_0^{-1}\right) = 0$. Dans tous les cas, on a bien $f(J) = 0$ et donc $f(A) = 0$.*

Références