Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer le rang de la comatrice $\widetilde{A}$ en fonction du rang de A. (Penser à la caractérisation du rang par les matrices extraites.)

Solution : *Soit n la taille de la matrice A. Si A est de rang n, alors elle est inversible et $\widetilde{A}$ l'est aussi, donc elle est aussi de rang n.*
Si A est de rang $< n-1$, alors tous les déterminants extraits d'ordre $n-1$ sont nuls, donc a fortiori tous les mineurs sont nuls et donc $\widetilde{A}$ est nulle et donc de rang nul.
Reste à voir le cas où le rang de A est $n-1$. Cela entraine que $D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ est de dimension 1. Comme on a $A\widetilde{A}^{\mathrm{T}} = 0$, on en déduit que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \widetilde{A}^{\mathrm{T}}X \in D$. Ceci signifie que $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}$ est de rang inférieur ou égal à 1. Il en est de même pour sa transposée $\widetilde{A}$. Enfin comme A est de rang $n-1$, elle admet au moins un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Mais un déterminant extrait d'ordre $n-1$ est nécessairement un mineur. Donc $\widetilde{A}$ admet au moins un élément non nul et est donc de rang $\geqslant 1$. Finalement, si le rang de A est $n-1$, alors le rang de $\widetilde{A}$ est 1.

Références