Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans le plan, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point O de ce cercle. Déterminez l'ensemble des projections orthogonales du point O sur les tangentes au cercle $\mathcal{C}$.

Solution :

1. ***Choix du repère.*** *Notons Ω le centre du cercle. Considérons le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \dfrac{O\Omega}{\|O\Omega\|}$. Dans ce repère, $\Omega\begin{vmatrix} R \\ 0 \end{vmatrix}$ et l'équation du cercle $\mathcal{C}$ s'écrit*

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

2. *Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ et $M_\theta\begin{vmatrix} a + R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{vmatrix}$ un point du cercle. L'équation cartésienne de la tangente au point M_θ au cercle s'écrit*

$$(T_\theta) : \cos\theta(x - R) + \sin\theta y = R$$

Notons H_θ la projection orthogonale du point O sur la droite T_θ. Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ dirige la normale en M_θ, $H_\theta = O + \lambda\overrightarrow{n}$. Comme le point H appartient à la droite T_θ, on trouve $\lambda = R(1 + \cos\theta)$, on obtient les coordonnées polaires du point H_θ :

$$\rho = R(1 + \cos\theta)$$

On reconnaît une cardioïde *(voir la section* **??** *page* **??***).*

Références