Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 167 & 72 & 152 & 396 & 82 & 670 & 742 & 160 \\ 54 & 315 & 116 & 262 & 764 & 128 & 808 & 784 \\ 338 & 146 & 83 & 418 & 804 & 468 & 504 & 312 \\ 658 & 268 & 114 & 203 & 622 & 98 & 580 & 566 \\ 290 & 590 & 258 & 110 & 805 & 58 & 512 & 346 \\ 226 & 994 & 294 & 572 & 744 & 93 & 288 & 8 \\ 392 & 698 & 594 & 372 & 416 & 340 & 343 & 702 \\ 968 & 274 & 110 & 674 & 260 & 646 & 608 & 217 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Solution : *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ 1\leqslant j\leqslant 8}}$ *et* $I_8 = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ 1\leqslant j\leqslant 8}}$.

On a $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant 8, a_{ij} \equiv a'_{ij} \pmod 2$ *et*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \equiv \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(n),n} \equiv \det(I_8) \equiv 1 \pmod 2.$$

Donc $\det(A)$ *est impair, et donc non nul. Par suite,* A *est inversible.*

Les amateurs de calcul à la main doivent savoir que $\det(A) = -3060949331422362741897$ *avant de s'engager dans cette voie.*

Références