Déterminant de Cauchy

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Déterminant de Cauchy**

On considère $2n$ scalaires $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ tels que tous les a_i sont distincts et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_i \neq 0$. On veut calculer le déterminant de Cauchy *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*

$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)}.$$

2. *Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.*
3. *Calculer Δ_n.*

Solution :

1. *Puisque* $\deg R(X) = -1$, *et tous les pôles a_i sont simples, la décomposition s'écrit :*

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X + a_k} \text{ où } \lambda_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_j + a_k)}{\prod_{j \neq k}(a_j - a_k)} \neq 0.$$

2. *En effectuant l'opération $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$, on obtient*

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}.$$

Mais comme $R(b_1) = \cdots = R(b_{n-1}) = 0$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \dots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on tire

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)}\Delta_{n-1}.$$

3. Puisque $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, la relation de récurrence précédente donne

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}.$$

Références