Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Calculer les déterminants suivants en utilisant un déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Indication 0.0 : *Pour le deuxième, introduire*

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Solution : *Supposons dans un premier temps que* $abcd \neq 0$. *Alors*

$$\Delta_1 = \frac{1}{abcd} \det(aC_1, bC_2, cC_3, dC_4) = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ abcd & abcd & abcd & abcd \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

et on reconnaît un déterminant de Vandermonde donc $\Delta_1 = -(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.

Si on suppose que $abcd = 0$, *considérons* $f(\varepsilon) = \Delta_1(a+\varepsilon, b+\varepsilon, c+\varepsilon, d+\varepsilon)$ *avec* ε *en sorte que* $(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)(c+\varepsilon)(d+\varepsilon) \neq 0$. *Cette fonction est continue en* ε *car polynomiale en* ε. *Lorsque* $\varepsilon \to 0$, *on retrouve l'expression de* Δ_1. C'est une astuce classique à retenir.

Pour Δ_2, *on calcule le déterminant de Vandermonde*

$$P(x) = V(x, a, b, c, d) = (d-x)(d-a)(d-b)(d-c)\dots(a-x)$$

et en développant $P(x)$ *par rapport à la première ligne, on s'aperçoit que* Δ_2 *est le coefficient en* x^3 *de* $P(x)$. *On obtient donc* $\boxed{\Delta_2 = -(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)}$.

Références