Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A+X) = \det(A) + \det(X).$$

Solution : *Soit A une telle matrice. En prenant $X = A$, on obtient que $\det(2A) = 2\det(A)$ d'où $2^{n-1}\det(A) = 0$. Lorsque $n \geqslant 2$, il est nécessaire que $\det(A) = 0$. On a donc :*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A+X) = \det(X)$$

Notons r le rang de A. La matrice A est équivalente à la matrice J_r donc il existe deux matrices inversibles $P, Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$. Si l'on suppose que $r > 0$, en prenant $X = P(Y_{n-r})Q$ où Y_{n-r} désigne la matrice $\mathrm{Diag}(0,\dots,0,1,\dots,1)$ avec $(n-r)$ 1 sur la diagonale, on trouve que $\det(PQ) = \det(P)\det(Y_{n-r})\det(Q)$ ce qui est absurde puisque la matrice Y_{n-r} n'est pas inversible. Nécessairement, $r = 0$ et donc $A = 0$. Réciproquement, la matrice nulle convient.

Références