Dérangement

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Dérangement***

1. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est un* dérangement *lorsque $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$. Y a-t-il plus de dérangements de signature $+1$ que de dérangements de signature -1 ?*

Solution :

1. *Avec l'opération $\leftarrow C_1C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, on factorise $(n-1)$ dans la première colonne. Ensuite pour $i \in [\![2, n]\!]$, $\leftarrow C_iC_i - C_1$ fait apparaître des zéros et on trouve que $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$.*
2. *Avec la formule du déterminant,*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

si σ n'est pas un dérangement, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$ et alors $a_{\sigma(i),i} = 0$. En notant $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements, d_n^+ le nombre de dérangements pairs et d_n^- le nombre de dérangements impairs,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = d_n^+ - d_n^-.$$

Lorsque n est impair, comme $\det(A) > 0$, il y a plus de dérangements pairs que d'impairs et lorsque n est pair, c'est le contraire.

Références