Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+j > n+1 \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Calculer $\det(A)$. *Si on suppose de plus que* $a_{ij} > 0$ *lorsque* $i + j \leqslant n+1$, *déterminer le signe de* $\det(A)$.

Solution : *Étudier deux cas :*

1. n *pair :* $n = 2p$. *En effectuant les échanges de colonnes* $\leftrightarrow C_1 C_n, \dots, \leftrightarrow C_p C_{p+1}$, *on trouve une matrice triangulaire supérieure et le déterminant vaut*

$$(-1)^p a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n,1}.$$

2. n *impair :* $n = 2p+1$. *En effectuant les échanges de colonnes* $\leftrightarrow C_1 C_n, \dots, \leftrightarrow C_p C_{p+2}$ *on trouve également que* $\det(A) = (-1)^p a_{1,n} \dots a_{n,1}$.

Le signe de $\det(A)$ *dépend de* n *modulo 4 (parité de* p*).*

Références