Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Solution : *On propose deux solutions.*

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$. *En développant,*
   $D = \begin{vmatrix} A+B & B+C & C+A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix}$.
   En mettant abc *en facteur, on trouve un déterminant de Vandermonde, et donc* $D = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$.
2. *On écrit*
   $$\begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On a
   $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(c-a)(c-b)(b-a)$$
   toujours grâce au déterminant de Vandermonde, et
   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$
   D'où le résultat.

Références