Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Calculer les déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} (x+1) & 1 & \dots & & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & \dots & & (x+n) \end{vmatrix}.$$

Solution : Pour Δ_1 , ajouter toutes les colonnes à la première :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n.$$

On trouve alors un déterminant triangulaire : $\Delta_1 = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Pour Δ_2 , retrancher la première colonne à toutes les autres :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad \dots \quad C_n \leftarrow C_n - C_1.$$

On remarque ensuite que dans les $n-1$ dernières colonnes, la somme de tous les éléments vaut 0. Ajouter donc toutes les lignes à la première. On se ramène à un déterminant triangulaire :

$$\Delta_2 = x^{n-1} \left(x + \frac{n(n+1)}{2} \right).$$

Références