Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Montrer que la signature est le seul morphisme de groupes non trivial de $(\mathfrak{S}(n), \circ)$ *vers* $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Indication 0.0 : *On pourra utiliser l'exercice* **??**.

Solution : *Soit* φ *un tel morphisme. On doit avoir*

$$\forall(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}(n)^2, \quad \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varphi(\sigma_1) \times \varphi(\sigma_2).$$

Soit une transposition τ. *Comme* $\tau^2 = \mathrm{id}$, *on doit avoir* $\varphi(\tau)^2 = 1$ *et donc* $\varphi(\tau) = \pm 1$. *Par conséquent, puisque toute permutation se décompose comme produit de transpositions, on en déduit que* $\operatorname{Im}\varphi \subset \{-1, 1\}$.

Supposons que φ *n'est pas triviale. Il existe alors une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ *telle que* $\varphi(\sigma) = -1$, *et comme* σ *se décompose en produit de transpositions de la forme* τ_{1i}, *il existe* $i \in [\![1, n]\!]$ *telle que* $\varphi(\tau_{1i}) = -1$. *Mais alors pour* $j \in [\![1, n]\!]$, $j \neq i$, $\tau_{1j} \circ \tau_{1i} = \begin{pmatrix} i & j & 1 \end{pmatrix} = c$, *mais puisque* $c^3 = \mathrm{id}$, $1 = \varphi(c)^3 = \varphi(\tau_{1i})^3 \varphi(\tau_{1j})^3 = -1$, *et donc* $\varphi(\tau_{1j}) = -1$.

Soit alors une permutation quelconque. Elle se décompose comme un produit de transpositions de la forme τ_{1i} *:*

$$\sigma = \tau_{i_1} \circ \cdots \circ \tau_{i_k}$$

et alors $\varphi(\sigma) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$.

Références