Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans un groupe G, étant donné un élément $g \in G$, on considère la conjugaison *:*

$$\varphi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que $\forall g \in G$, l'application φ_g est un automorphisme de G et que l'application*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} (G, .) & \longrightarrow & (\ Aut(G), \circ) \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array} \right.$$

   est un morphisme de groupes.
2. *Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$, on considère une transposition $\tau = \tau_{ij}$ et une permutation σ. Calculer le conjugué $\sigma' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \varphi_\sigma(\tau)$.*
3. *Calculer le conjugué d'un cycle $c = (i_1 \ \ldots \ i_k)$ par une permutation σ : $\sigma' = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.*

Solution :

1. *Vérification sans problème.*
2. *Notons $k = \sigma(i)$ et $l = \sigma(j)$. On calcule $\sigma'(k) = \sigma(j) = l$ et $\sigma'(l) = \sigma(i) = k$. Si $p \notin \{k, l\}$, $\sigma'(p) = \sigma(\sigma^{-1}(p)) = p$. Par conséquent, $\sigma' = \tau_{\sigma(i)\sigma(j)}$.*
3. *Décomposons le cycle en produit de transpositions :*

$$c = \tau_{i_1 i_2} \circ \tau_{i_2 i_3} \circ \cdots \circ \tau_{i_{k-1} i_k}$$

   Puisque θ est un morphisme, on a

$$\varphi_c = \varphi_{\tau_{i_1 i_2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\tau_{i_{k-1} i_k}}$$

   et donc pour $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$, $\varphi_c(\sigma) = \tau_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \ldots \tau_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$. Le conjugué d'un cycle par une permutation est encore un cycle.

Références