Pas de titre

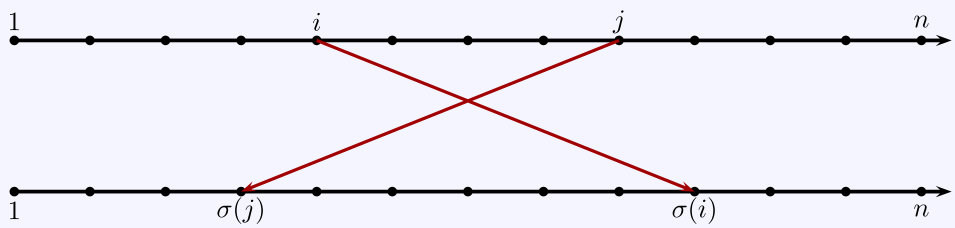
Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver le nombre de permutations de $\mathfrak{S}(n)$ qui ont exactement une inversion.



Solution :

Soit σ une telle permutation. Une inversion c'est une paire de flèches (rouges) qui se coupent. Pour n'avoir qu'une seule inversion, seules ces deux flèches doivent se couper.

Pour l'image de 1 par σ, on doit avoir 1 sinon on aurait 1 qui serait l'image d'un $k > 1$ et la flèche $1 \to \sigma(1)$ couperait la flèche $k \to 1$.

De même $\forall p \in [\![1, i-1]\!]$, on a $\sigma(p) = p$.

Maintenant, on a $\sigma(i) > i$. Donc nécessairement i est l'image d'un $k > i$, dont la flèche $k \to i$ va couper la flèche $i \to \sigma(i)$. Comme il n'y en a qu'une seule qui coupe cette flèche $i \to \sigma(i)$, à savoir la flèche $j \to \sigma(j)$, on en déduit que $k = j$ et $\sigma(j) = i$. De même $\sigma(i+1)$, l'image de $i+1$ est plus grande que $i+1$ (toutes les places $1, 2, \dots, i$ sont déjà prises pour les images). Donc supposons l'espace d'un instant que $i+1 \neq j$, on aurait une flèche $i+1 \to \sigma(i+1)$ différente de $i \to \sigma(i)$ qui couperait $j \to i$, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc $i+1 = j$.

Par la suite, toujours pour éviter que d'autres flèches se coupent, pour $p > i+1$ (s'il en existe) on a $\sigma(p) = p$. Réciproquement, une permutation de cette forme ne possède qu'une inversion.

On a donc $n-1$ possibilités pour i et donc $n-1$ permutations de $\mathfrak{S}(n)$ qui ont exactement une inversion.

Références