Centre du groupe symétrique

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Centre du groupe symétrique***

On définit le centre *d'un groupe* $(G, .)$ *comme étant les éléments du groupe qui commutent avec tous les éléments du groupe :*

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, g.h = h.g\}.$$

On a vu dans l'exercice **??** *page* **??** *que* $Z(G)$ *est un sous-groupe de* G*. Déterminer le centre du groupe symétrique* $\mathfrak{S}(n)$ *lorsque* $n \geqslant 3$*.*

Solution : *Considérons une permutation* σ *qui commute avec toutes les permutations. Elle doit en particulier commuter avec toutes les transpositions* τ_{ij}*. D'après l'exercice précédent,* $\{i, j\}$ *doit être stable par* σ*. Considérons maintenant* $k \in [\![1, n]\!]$*. Puisque* $n \geqslant 3$*, on peut trouver trois entiers distincts* $\{i, j, k\}$ *dans* $[\![1, n]\!]$*. En considérant la transposition* τ_{ik}*,* $\sigma(k) \in \{i, k\}$ *et en considérant la transposition* τ_{jk}*,* $\sigma(k) \in \{j, k\}$ *et par conséquent,* $\sigma(k) = k$*. Nous avons montré que* $\sigma = \mathrm{id}$ *et que* $Z(\mathfrak{S}(n)) = \{\mathrm{id}\}$*.*

Références