Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme* $\tau_{1,i}$ avec $i \in [\![2, n]\!]$.
2. *Montrer que toute permutation paire peut s'écrire comme produit de cycles de longueur* 3.

Solution :

1. *On sait d'après le cours que toute permutation* σ *peut s'écrire comme produit de transpositions* τ_{ij}*. Il suffit donc de montrer qu'une transposition* τ_{ij} *avec* $1 \neq i$, $1 \neq j$ *peut s'écrire comme produit de transpositions* τ_{1k}*. Le calcul suivant montre que c'est le cas :*

$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i} = \tau_{ij}.$$

2. *Soit* $\sigma \in \mathcal{A}_n$ *une permutation paire. D'après 1., elle s'écrit comme produit d'un nombre pair de transpositions de la forme* τ_{1i}*. Mais si l'on calcule le produit de deux telles transpositions, on trouve un 3-cycle :*

$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} = (1,\ j,\ i).$$

Par conséquent, notre permutation paire σ *s'écrit comme produit de tels 3-cycles.*

Références