

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

1. Montrer que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $\tau_{1,i}$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
2. Montrer que toute permutation paire peut s'écrire comme produit de cycles de longueur 3.

Solution :

1. On sait d'après le cours que toute permutation σ peut s'écrire comme produit de transpositions τ_{ij} . Il suffit donc de montrer qu'une transposition τ_{ij} avec $1 \neq i, 1 \neq j$ peut s'écrire comme produit de transpositions τ_{1k} . Le calcul suivant montre que c'est le cas :

$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i} = \tau_{ij}.$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ une permutation paire. D'après 1., elle s'écrit comme produit d'un nombre pair de transpositions de la forme τ_{1i} . Mais si l'on calcule le produit de deux telles transpositions, on trouve un 3-cycle :

$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} = (1, j, i).$$

Par conséquent, notre permutation paire σ s'écrit comme produit de tels 3-cycles.

Références