Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la permutation de $\mathfrak{S}(2n)$ *définie par*

$$\sigma(p) = \begin{cases} 2p-1 & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n \\ 2(p-n) & \text{si } n < p \leqslant 2n \end{cases}.$$

Déterminer sa signature.

Solution : *Pour* $n = 2$, *on trouve* $\varepsilon(\sigma) = -1$. *Pour* $n = 3$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ *et sa signature vaut* -1. *Pour* n *quelconque,*

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & (n+1) & (n+2) & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & (2n-1) & 2 & 4 & \dots & 2n \end{smallmatrix}\right)$$

Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$, *on compte facilement* $\sharp\{j > i \mid \sigma(j) < \sigma(i)\} = i - 1$ *lorsque* $i \leqslant n$ *et* 0 *si* $i > n$. *Par conséquent, le nombre d'inversions de* σ *vaut* $1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n-1) \times n/2$ *et la signature vaut* $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Références