Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

Solution : *Soit f une telle fonction. Elle est deux fois dérivable puisque f' est une composée de fonctions dérivable (puisque $f = f' \circ \varphi$ où $\varphi(x) = -x$), et en dérivant, on trouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x) = f(x)$. Par conséquent, f est solution de l'équation différentielle $y'' = y$ et donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = Ae^{x} - Be^{-x} = Ae^{-x} + Be^{x}$ d'où nécessairement $A = B$ et $A = -B$ et donc $f = 0$. La fonction nulle vérifie réciproquement la propriété.

Références