Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *continues vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Solution : *D'après le théorème fondamental, puisque les fonctions* f *et* $t \mapsto tf(t)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$*, la fonction définie par* $F(x) = x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, avec* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $F'(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$*. Par conséquent, la fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

En appliquant encore une fois le théorème fondamental, on montre que f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\cos x - f(x)$$

donc que f *vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. En résolvant cette équation, il existe deux constantes* $(A, B) \in \mathbb{R}2$ *telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{x^2}{2}\sin(x)$$

Mais comme d'après l'équation vérifiée par f*,* $f(0) = 1$*, et l'équation vérifiée par* f'*,* $f'(0) = -1$*, on en tire* $A = 1$ *et* $B = -1$*. Par conséquent, la seule solution possible est*

$$f(x) = \cos x - \sin x - \frac{x}{2}\sin x$$

On vérifie réciproquement que cette fonction est bien solution de notre problème en calculant l'intégrale $\int_0^x (x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$*.*

Références