Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Solution : *D'après le théorème fondamental, puisque les fonctions f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction définie par $F(x) = x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

En appliquant encore une fois le théorème fondamental, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\cos x - f(x)$$

donc que f vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. En résolvant cette équation, il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{x^2}{2}\sin(x)$$

Mais comme d'après l'équation vérifiée par f, $f(0) = 1$, et l'équation vérifiée par f', $f'(0) = -1$, on en tire $A = 1$ et $B = -1$. Par conséquent, la seule solution possible est

$$f(x) = \cos x - \sin x - \frac{x}{2}\sin x$$

On vérifie réciproquement que cette fonction est bien solution de notre problème en calculant l'intégrale $\int_0^x (x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$.

Références