Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux fonctions f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f et g sont nulles.

Solution : *D'après le théorème fondamental, puisque g est continue sur $[0,1]$, la fonction f est de classe 1 sur $[0,1]$, et de même, g est de classe 1 sur $[0,1]$, avec $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$. On en déduit que f et g sont deux fois dérivables sur $[0,1]$ et que $\forall x \in [0,1]$, $f''(x) = g'(x) = f(x)$, et $g''(x) = g(x)$. Par conséquent, il existe quatre constantes $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $(A',B') \in \mathbb{R}^2$ telles que*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x \text{ et } g(x) = A' \operatorname{sh} x + B' \operatorname{ch} x$$

En injectant dans $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et dans $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on trouve que $A = B = A' = B' = 0$ et par conséquent, $f = g = 0$.

Références