Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2y' + y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Solution : *Soit I un intervalle ne contenant pas 0. Les solutions de (E) sur I sont les solutions de l'équation normalisée*

$$(E') \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

L'équation homogène associée s'écrit :

$$(H) \quad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Notons $a(x) = \dfrac{1}{x}$, dont une primitive est $A(x) = \ln|x|$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est alors

$$S_H = \left\{ x \mapsto ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

(en posant $C = -c$ si $I \subset]-\infty, 0[$). On trouve ensuite une solution particulière évidente, $\tilde{y}(x) = 1$. Les solutions de (E) sur I sont donc de la forme

$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{C}{x}}$$

Si maintenant $0 \in I$, et y est une solution sur I, alors il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I \subset]0, +\infty[$, $y(x) = 1 + \dfrac{C_1}{x}$ et il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I \subset]-\infty, 0[$, $y(x) = 1 + \dfrac{C_2}{x}$. Pour que y soit solution en 0, il faut d'après l'équation que $y(0) = 1$. Pour qu'une telle fonction soit dérivable en 0, il faut et il suffit que $C_1 = C_2 = 0$. La seule solution de (E) sur I est donc la fonction constante égale à 1.

Références