Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

1. *Résoudre* (E) *sur des intervalles qu'on précisera.*
2. *Déterminer les solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution :

1. *L'équation normalisée associée à* (E) *est* $(N) \ : y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x}$. *Celle-ci est définie sur* $I_1 =]-\infty, 0[$ *et* $I_2 =]0, +\infty[$. *Appliquant d'abord sur* I_1 *puis sur* I_2 *le théorème fondamental et la méthode de variation de la constante, on trouve que, pour* $k = 1, 2$, *les solutions de* (N) *et donc de* (E) *sont, sur* I_k *de la forme :*

$$\varphi_{\alpha_k} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^4}{2} + 2\,x^3 + 2\,x + \frac{1}{2} + \alpha_k x^2 \end{array} \right. \quad ; \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

2. *Supposons qu'il existe* φ *une solution de* (E) *définie sur* $\mathbb{R}$. *Alors* φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et il existe* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\varphi_{|I_1} = \frac{x^4}{2} + 2\,x^3 + 2\,x + \frac{1}{2} + \alpha_1 x^2$ *et* $\varphi_{|I_2} = \frac{x^4}{2} + 2\,x^3 + 2\,x + \frac{1}{2} + \alpha_2 x^2$. *Posons alors :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^4}{2} + 2\,x^3 + 2\,x + \frac{1}{2} + \alpha_1 x^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^4}{2} + 2\,x^3 + 2\,x + \frac{1}{2} + \alpha_2 x^2 & \text{si } x \in I_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

   On vérifie facilement que φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Réciproquement, une fonction* φ *ainsi définie est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Références