Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2-1)y' - xy + 3(x-x^3) = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Solution : *Soit $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, l'équation est équivalente à l'équation normalisée*

$$(E'): \quad y' - \frac{x}{x^2-1}y = 3x$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\{x \mapsto C\sqrt{|x^2-1|} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

On recherche ensuite une solution particulière de la forme $y(x) = C(x)\sqrt{|x^2-1|}$ avec $C'(x) = 3x\sqrt{|x^2-1|}$, $C(x) = 3\int x\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}dx$ où $\varepsilon = +1$ sur I_1 et I_3, $\varepsilon = -1$ sur I_2. On trouve $y(x) = 3(x^2-1)$ comme solution particulière. Donc la solution générale de (E) sur I_k s'écrit

$$y(x) = 3(x^2-1) + C\sqrt{|x^2-1|}$$

Sur un intervalle I contenant 1 ou -1, puisque la fonction $\sqrt{|x^2-1|}$ n'est pas dérivable en 1 et -1, la seule solution de (E) est la fonction $y(x) = 3(x^2-1)$.

Références