Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad (1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$$

d'inconnue $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *supposée deux fois dérivables. On pourra utiliser le changement de variable défini par* $t = \arcsin x$.

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $]-1,1[$. *Posons* $z(t) = y(\sin t)$. *Comme* y *est deux fois dérivable, il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases} y(x) & = z(\arcsin x) \\ y'(x) & = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin x) \\ y''(x) & = \dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} z'(\arcsin x) + \dfrac{1}{(1-x^2)} z''(\arcsin x) \end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f'' + 9f = 0$. *Par conséquent, il existe* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z : t \mapsto A\cos 3t + B\sin 3t$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y : x \mapsto \cos(3\arcsin x) + B\sin(3\arcsin x)$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation sur* $\mathbb{R}$.

Références