Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E)\ :\quad \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + 4y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$.

Solution : *Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $z(t) = y(\tan t)$. Comme y est deux fois dérivable, il en est de même de z et on a :*

$$\begin{cases} y(x) &= z(\arctan x) \\ y'(x) &= \dfrac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} z'(\arctan x) + \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2} z''(\arctan x) \end{cases}.$$

Comme y est solution de la première équation, z est solution de : $f'' + 4f = 0$. Par conséquent, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z : t \mapsto A\cos 2t + B\sin 2t$. La fonction y est alors donnée par : $y : x \mapsto \cos(2\arctan x) + B\sin(2\arctan x)$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Références